Benites

Control Adaptivo por Modelo de Referencia

Ejercicio

La ecuación diferencial que modela al péndulo (ver figura 1) puede representarse por:

$$J\theta(t)+c\theta(t)+mgd_c sen\theta = d_1 T$$

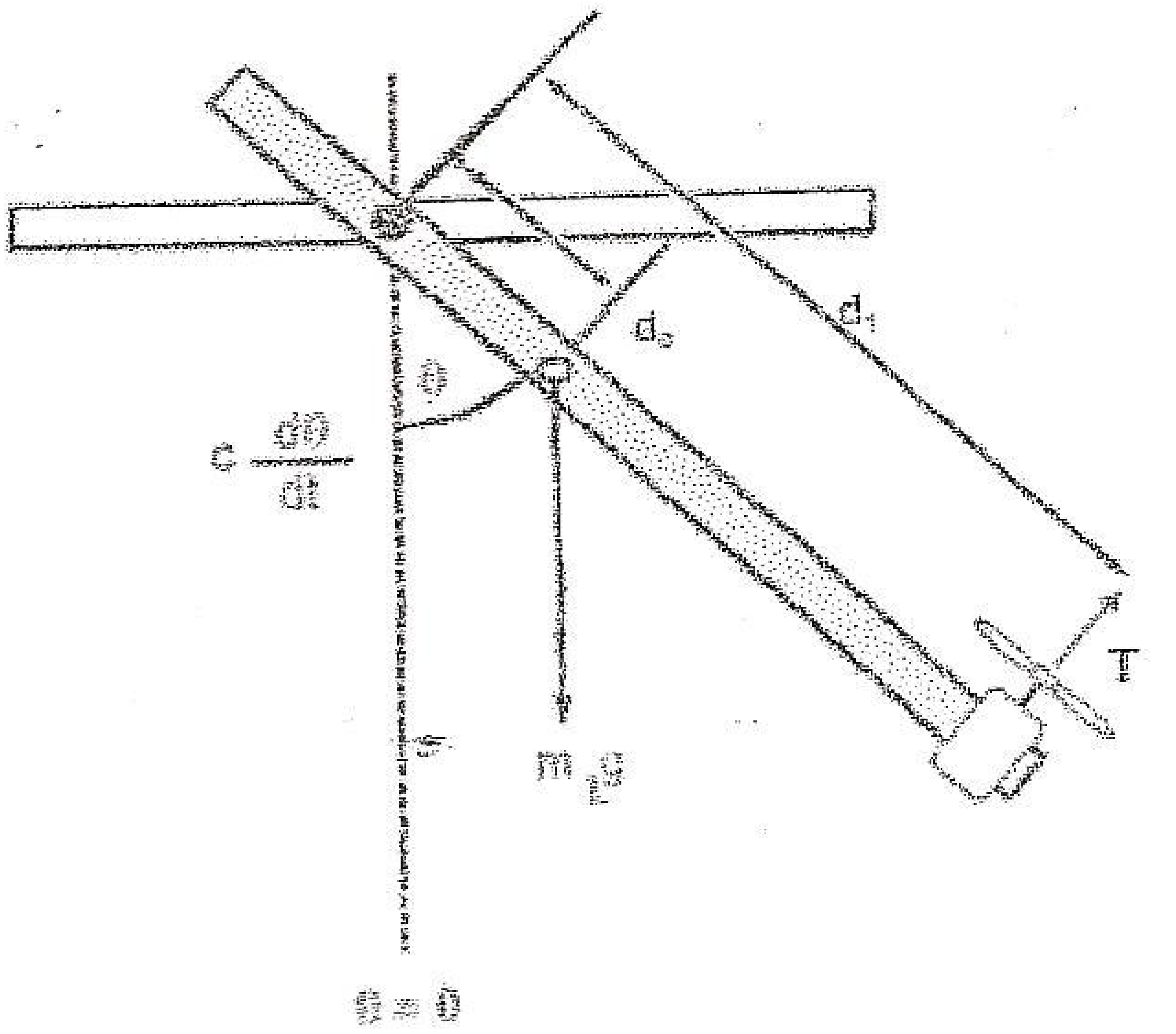


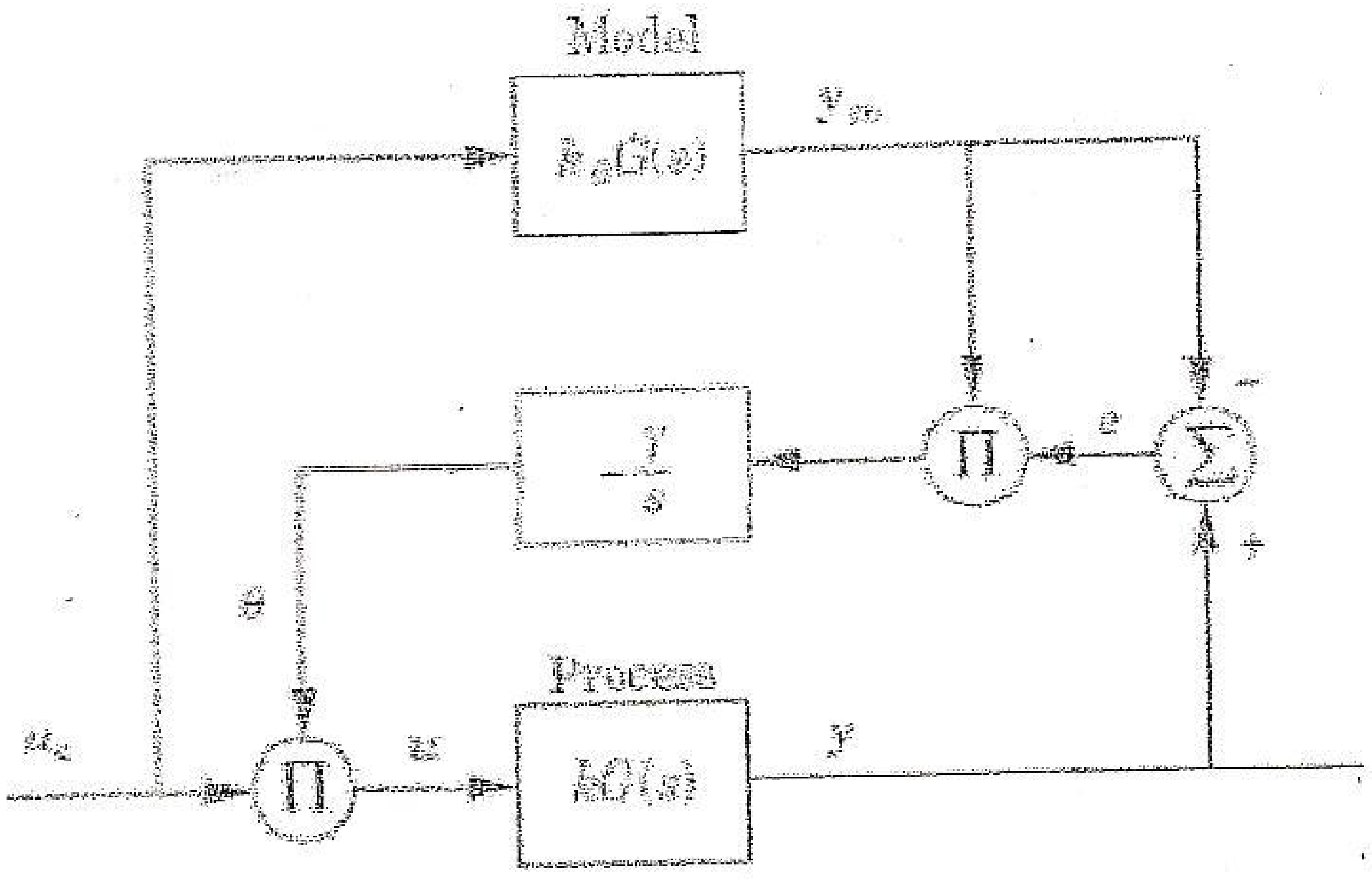
Figura 1: Esquema del péndulo

Determinar:

a) La función de transferencia del proceso G(s), considerando θ (salida: y) y T (entrada: u).
Considere además que la variación de θ es pequeña.
b) La función de transferencia del modelo de referencia $G_m(s)$
c) La ley de control para el sistema de segundo orden
d) El error de seguimiento
e) La derivada de la sensitividad con respecto a los parámetros del controlador (θ_1, θ_2)
f) La variación de los parámetros del controlador adaptivo respecto el tiempo aplicando la regla del MIT

DATOS:

$d_1 = 1.89; \quad J = 1; \quad c = 0.0389; \quad mgd_c = 10.77$. Considere la estructura del Control Adaptivo por Modelo de referencia mostrado en la figura 2.



$J\ddot{\theta}(t) + c\theta(t) + mgd_c \,\mathrm{sen}\,\theta = d_1 T$

SOLUCIÓN

a) Aplicando transformada de Laplace a la ecuación del péndulo:

$$Js^2\theta(s) + cs\theta(s) + mgd_c\theta(s) = d_1 T(s)$$

$$(Js^2 + cs + mgd_c)\theta(s) = d_1 T(s)$$

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{d_1}{Js^2 + cs + mgd_c} = \frac{1.89}{s^2 + 0.0389s + 10.77}$$

b) El modelo de referencia puede ser dado por:

$$G_m = \frac{b_m}{(s^2 + a_{1m}s + a_{0m})}$$

c) La ley de control

$u = \theta_1 u_c - \theta_2 y.$

$$u = \theta_1 u_c - \theta_2 y$$

d) La ecuación dele error viene dada por:

$$e = y - y_m$$

$e = y - y_m.$

Siendo:

$$y = G(s)u; \quad y_m = G_m(s)u_c$$

$$y = G(s)[\theta_1 u_c - \theta_2 y] \quad \Rightarrow \quad [1 + G(s)\theta_2]y = G(s)\theta_1 u_c$$

$$y = \frac{G(s)\theta_1}{1 + G(s)\theta_2} u_c = \frac{1.89\theta_1}{s^2 + 0.0389s + 10.77 + 1.89\theta_2} u_c$$

$$y_m = G_m(s)u_c$$

$$y_m = \frac{b_m}{s^2 + a_{1m}s + a_{0m}} u_c$$

Entonces:

$$e = y - y_m$$

$$e = \frac{1.89\theta_1}{s^2 + 0.0389s + 10.77 + 1.89\theta_2} u_c - \frac{b_m}{s^2 + a_{1m}s + a_{0m}} u_c$$

e) La derivada de la sensitividad

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{1.89}{s^2 + 0.0389s + 10.77 + 1.89\theta_2} u_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{(1.89)^2\theta_1}{(s^2 + 0.0389s + 10.77 + 1.89\theta_2)^2} u_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{1.89}{(s^2 + 0.0389s + 10.77 + 1.89\theta_2)} \frac{1.89\theta_1}{(s^2 + 0.0389s + 10.77 + 1.89\theta_2)} u_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{1.89}{(s^2 + 0.0389s + 10.77 + 1.89\theta_2)} y$$

El modelo de referencia con la planta en lazo cerrado, nos permitirá obtener un error estacionario nulo; por lo que podemos efectuar la siguiente aproximación:

$$s^2 + 0.0389s + 10.77 + 1.89\theta_2 \approx s^2 + a_{1m}s + a_{0m}$$

Por lo que:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{a_{1m}s + a_{0m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{0m}} u_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{a_{1m}s + a_{0m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{0m}} y$$

f) La regla del MIT para la variación de los parámetros respecto del tiempo está dada por:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial \theta_1} e = -\gamma \left(\frac{a_{1m}s + a_{0m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{0m}} u_c \right) e$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial \theta_2} e = \gamma \left(\frac{a_{1m}s + a_{0m}}{s^2 + a_{1m}s + a_{0m}} y \right) e$$

Benites (Parcial) F151
Control Avanzado.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERIA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

EXÁMEN PARCIAL
CURSO: CONTROL AVANZADO
Ciclo: 2010-1

Profesor: M. SC., Ing. Raúl Benites S.
Fecha: 28 / 05 / 2010
Duración: 100 minutos
Nota: Sin copias ni apuntes

1. Dado un proceso no lineal con las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + sen x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1$$

Determine:

a) Determine las ecuaciones de estado del sistema transformado, considerando: **(4 puntos)**

$$z_1 = x_1$$
$$z_2 = ax_2 + sen x_1$$

b) Una ley de Control No Lineal "u" que linealice totalmente el sistema transformado **(1 punto)**

c) Las ecuaciones de estado transformado y linealizado totalmente en su forma matricial, en función de la nueva señal lineal equivalente v. **(1 punto)**

d) La matriz ganancia de un Regulador por Localización de Polos, tal que los polos deseados de lazo cerrado sean: **(4 puntos)**

$$\mu_{1,2} = -2 \pm j1$$

e) La ecuación de la ley de regulación considerando los resultados obtenidos en (d) **(1 punto)**

2. Dado el proceso mostrado en la figura 1, cuya ecuación está dada por:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{kh^2}\left(u - \alpha\sqrt{2gh}\right)$$

Considerando los siguientes datos: $\alpha = 0.5$, $g = 9.8$, $k = 1$, $h_d = 1$, determine:

a) Una ley de Control No Lineal "u" que linealice la ecuación del proceso **(2 puntos)**

b) Un diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado, considerando que la ley de Control Lineal "v" está dada por $v = \alpha(h_d - h)$. En el diagrama debe aparecer la altura de referencia (altura deseada) y la señal sensada (h). **(2 puntos)**

c) Anote las tres (03) condiciones necesarias y suficientes para que exista una transformación del vector de estado que lleve a un sistema no lineal genérico a su forma canónica controlable. **(5 puntos)**

Solucionario – ciclo: 2010-I

Ex. parcial – Control avanzado

(1)

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + a x_2 + \sin x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1$$

a) Ecuac. estado del sist. transformado, considerando:

$z_1 = x_1 \longrightarrow \dot{z}_1 = \dot{x}_1$

$z_2 = a x_2 + \sin x_1 \longrightarrow \dot{z}_2 = a\dot{x}_2 + \cos x_1 \dot{x}_1$

$\Rightarrow \dot{z}_1 = \dot{x}_1 = -2z_1 + z_2$ ✓

$$\dot{z}_2 = a\dot{x}_2 + \cos x_1 \dot{x}_1 = a\underbrace{\left[-x_2\cos x_1 + u\cos 2x_1\right]}_{\dot{x}_2} + \cos x_1 \underbrace{\left[-2x_1 + a x_2 + \sin x_1\right]}_{\dot{x}_1}$$
$$= \cancel{-a x_2 \cos x_1} + a u \cos 2x_1 - 2x_1 \cos x_1 + \cancel{a x_2 \cos x_1} + \cos x_1 \sin x_1$$
$$= a u \cos 2z_1 - 2\cos z_1 z_1 + \cos z_1 \sin z_1 \ ✓$$

$$\dot{z}_2 = \cos z_1 \sin z_1 - 2z_1 \cos z_1 + a u \cos 2z_1$$

4P

Ordenando:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= \cos z_1 \sin z_1 - 2z_1 \cos z_1 + a u \cos 2z_1 \end{aligned}}$$

b) Ley de control no lineal "u" que linealice totalmente el sist. transf.

$$u = \frac{1}{a\cos 2z_1}\left[v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1\right]$$

1P

c) Las ecuac. de estado transf. y linealizado totalmente en su forma matricial en función de "v".

$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$

$\dot{z}_2 = v$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v}$$

1P

d) Matriz ganancia del reg. por localiz. polos, considerando $\mu_{1,2} = -2 \pm j1$

* $(s-\mu_1)(s-\mu_2) = (s+2-j1)(s+2+j1) = s^2 + 4s + 5 = 0 \longrightarrow (1)$

* $|sI - (A-BK)| = 0 \rightarrow (A-BK) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |sI-(A-B)| = \begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ k_1 & s+k_2 \end{vmatrix} =$

$|sI - (A-BK)| = s^2 + (2+k_2)s + (k_1 + 2k_2) = 0 \longrightarrow (2)$

3 ANOTE

$\Rightarrow$ IGUALANDO (1) y (2):

$2+k_2=4 \Rightarrow k_2=2$

$k_1+2k_2=5 \Rightarrow k_1=1$ $\Rightarrow$ $\boxed{K=[1 \quad 2]}$

4P

e) ECUAC. LEY DE REGULACIÓN CONSIDERANDO (d):

$$\boxed{u=-Kz=-[1 \quad 2]\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=-z_1-2z_2}$$

1P

(2)

$$\dot{h}=\frac{1}{kh^2}\left(u-\alpha\sqrt{2gh}\right) \quad ; \alpha=0.5,\ g=9.8,\ k=1,\ h_d=1$$

a)

$$\dot{h}=\frac{1}{h^2}\left(u-0.5\sqrt{2(9.8)h}\right)=\frac{1}{h^2}\left(u-0.5\sqrt{19.6h}\right)$$

$$\dot{h}=\frac{1}{h^2}\left(u-2.2136\sqrt{h}\right) \Rightarrow \dot{h}=\underbrace{\frac{1}{h^2}}_{b(h)}u-\underbrace{\frac{2.2136\sqrt{h}}{h^2}}_{f(h)}$$

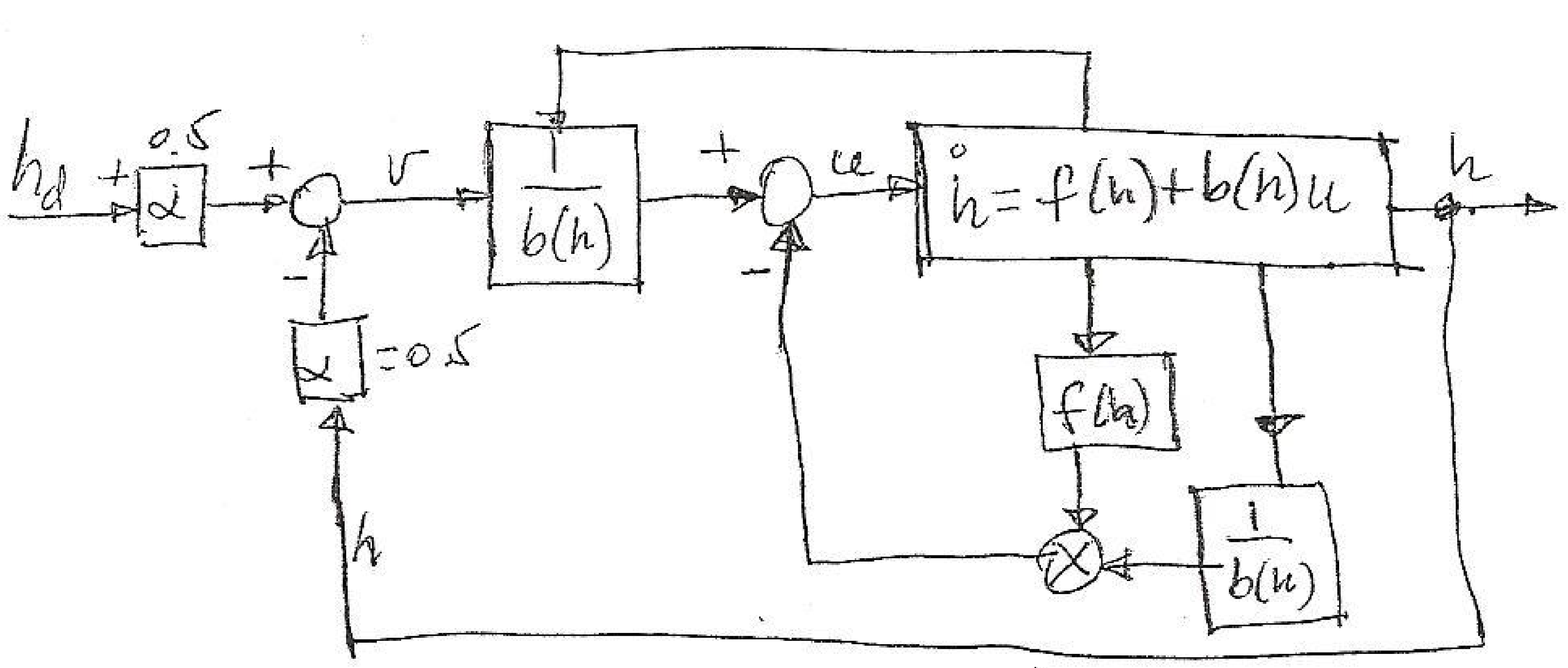
ORDENANDO:

$$\dot{h}=\underbrace{-\frac{2.2136}{h^2}\sqrt{h}}_{f(h)}+\underbrace{\frac{1}{h^2}}_{b(h)}u$$

$$\Rightarrow \boxed{u=\frac{1}{b(h)}\left[v-f(h)\right]=h^2\left[v+2.2136\frac{\sqrt{h}}{h^2}\right]}$$

2P

b) DIAG. BLOQUES CONSIDERANDO $v=\alpha(h_d-h)$



2P

3) ANOTE 3 CONDIC. NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA Q' EXISTA UNA TRANSF. DEL VECTOR DE ESTADO Q' LLEVE A UN SIST. NO LINEAL GENÉRICO A SU FORMA CANÓNICA CONTROLABLE.

LAS CONDICIONES SON:

1. EXISTENCIA DE LA TRANSF. INVERSA, ES DECIR:

$$\text{Rango}\begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial \overset{(1)}{h}(x)}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial \overset{(n-1)}{h}(x)}{\partial x} \end{bmatrix} = n$$

5P

2. LAS $(n-1)$ PRIMERAS DERIVADAS DE $h(x)$ NO DEPENDEN DEL CONTROL:

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial \overset{1}{h}}{\partial u} = \cdots = \frac{\partial \overset{(n-1)}{h}}{\partial u} = 0 \quad , \text{ DONDE: } \overset{(i)}{h} = \frac{\partial^{(i)} h(x)}{\partial x^i}$$

3. LA DERIVADA n-ÉSIMA DEPENDE EXPLÍCITAMENTE DEL CONTROL

$$\frac{\partial \overset{(n)}{h}(x,u)}{\partial u} \neq 0$$