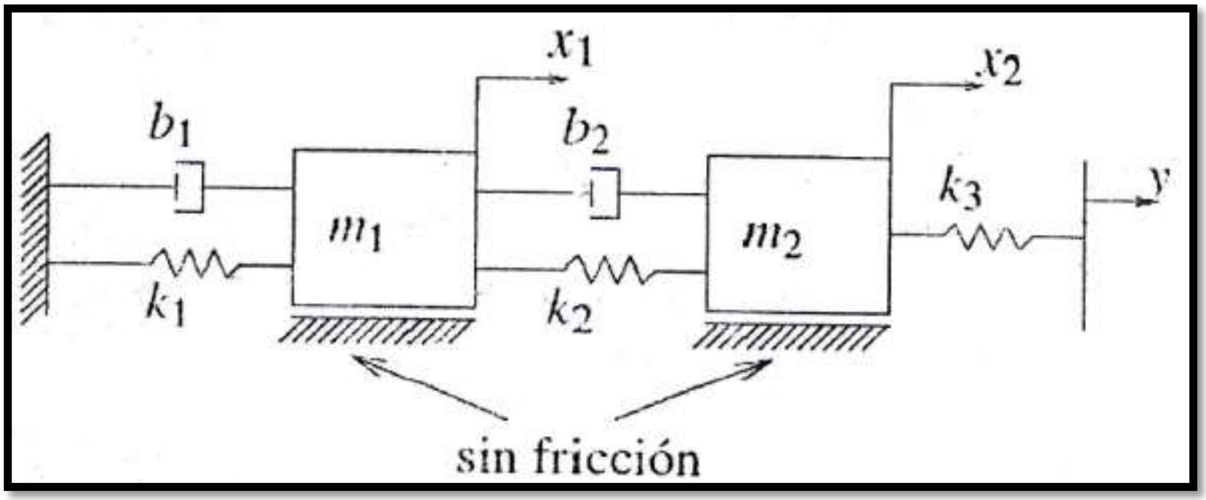
Problema 01.- Escriba las ecuaciones diferenciales para el sistema mecánico de una entrada y dos salidas en la figura. Obtenga la función de transferencia desde y a x1 y x2 para dicho sistema a partir de las matrices de su modelamiento en variables.



SOLUCIÓN :

$$m_1\ddot{x}_1 + b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) + b_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = y$$

Para el modelamiento en variables de estado:

$$z_1 = x_1$$
$$z_2 = \dot{x}_1$$
$$z_3 = x_2$$
$$z_4 = \dot{x}_2$$

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{m_1}[-b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_1 - x_2) - b_1\dot{x}_1 - k_1x_1]$$

$$= -\frac{k_2 + k_1}{m_1}z_1 - \frac{b_2 + b_1}{m_1}z_2 + \frac{k_2}{m_1}z_3 + \frac{b_2}{m_1}z_4$$

$$\dot{z}_3 = z_4$$

$$\dot{z}_4 = \frac{1}{m_2}[-b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) + y] = \frac{k_2}{m_2}z_1 + \frac{b_2}{m_2}z_2 - \frac{k_2}{m_2}z_3 - \frac{b_2}{m_2}z_4 + \frac{y}{m_2}$$

De ahí la ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\\ \dot{z}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & -\dfrac{b_1+b_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{b_2}{m_1}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{b_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{b_2}{m_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \dfrac{1}{m_2}\end{bmatrix}y$$

De $x_1 = z_1$ y $x_2 = z_2$ se tiene la ecuación de salida:

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{bmatrix}$$

Si $m_2 = 1$, $b_2 = 3$, $k_2 = 4$, $m_1 = 2$, $b_1 = 5$, $k_1 = 6$

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\\ \dot{z}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -5 & -4 & 2 & 1.5\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 4 & 3 & -4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}y$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}y$$

```
A=[0 1 0 0 0;-5 -4 2 1.5;0 0 0 1;4 3 -4 -3];
B=[0;0;0;1];
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
D=[0;0];

>> [NUM,DEN]=ss2tf(A,B,C,D)

NUM =

     0         0   -0.0000    1.5000    2.0000
     0    0.0000    1.0000    4.0000    5.0000


DEN =

    1.0000    7.0000   16.5000   19.0000   12.0000
```

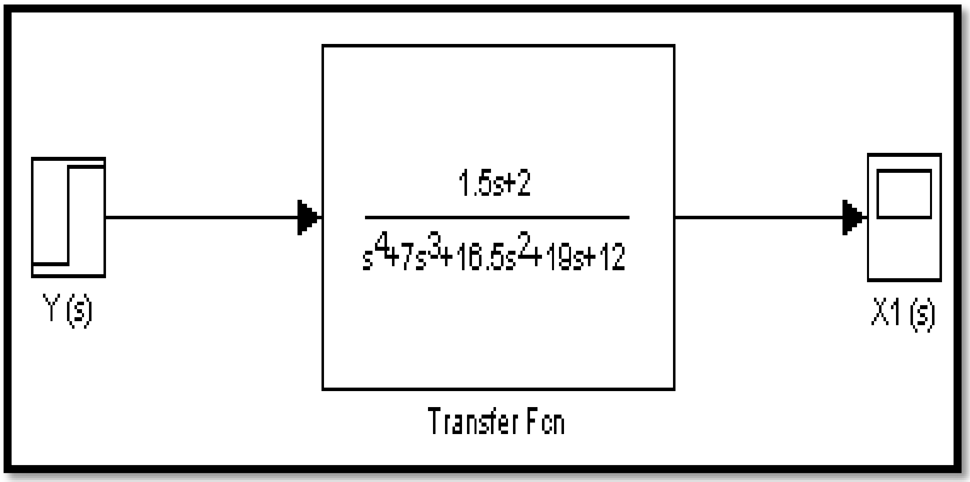
Entonces tenemos las funciones de transferencia:

$$\frac{X_1(s)}{Y(s)}=\frac{1.5s+2}{s^4+7s^3+16.5s^2+19s+12}$$

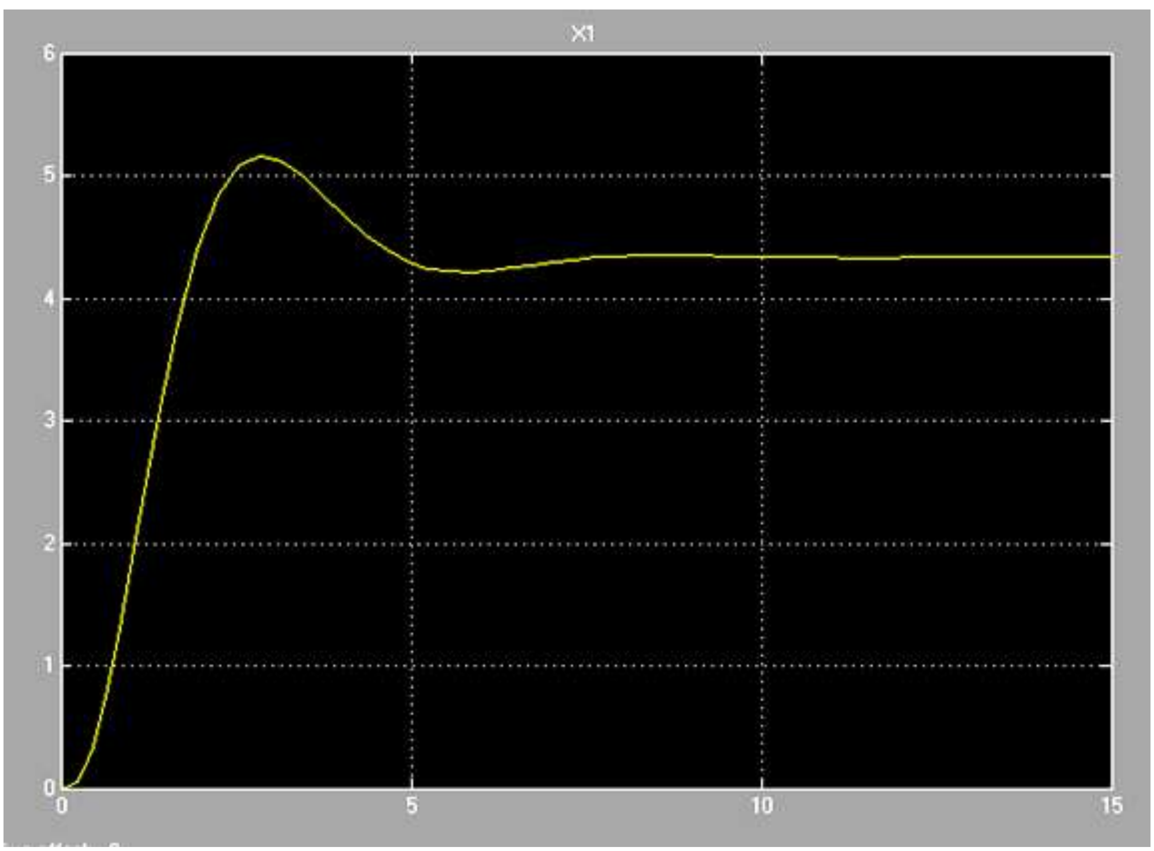
$$\frac{X_2(s)}{Y(s)} = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^4 + 7s^3 + 16.5s^2 + 19s + 12}$$

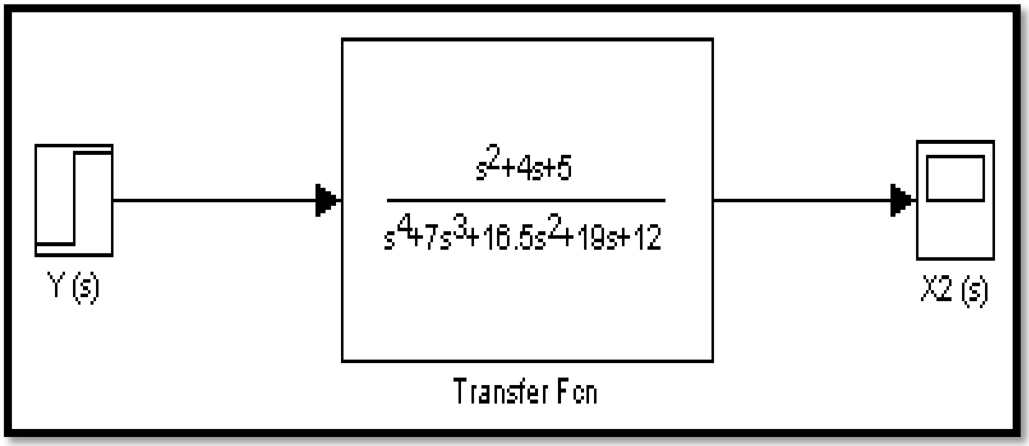
<u>EN SIMULINK</u>

Con una entrada y de 0 a 20 tenemos

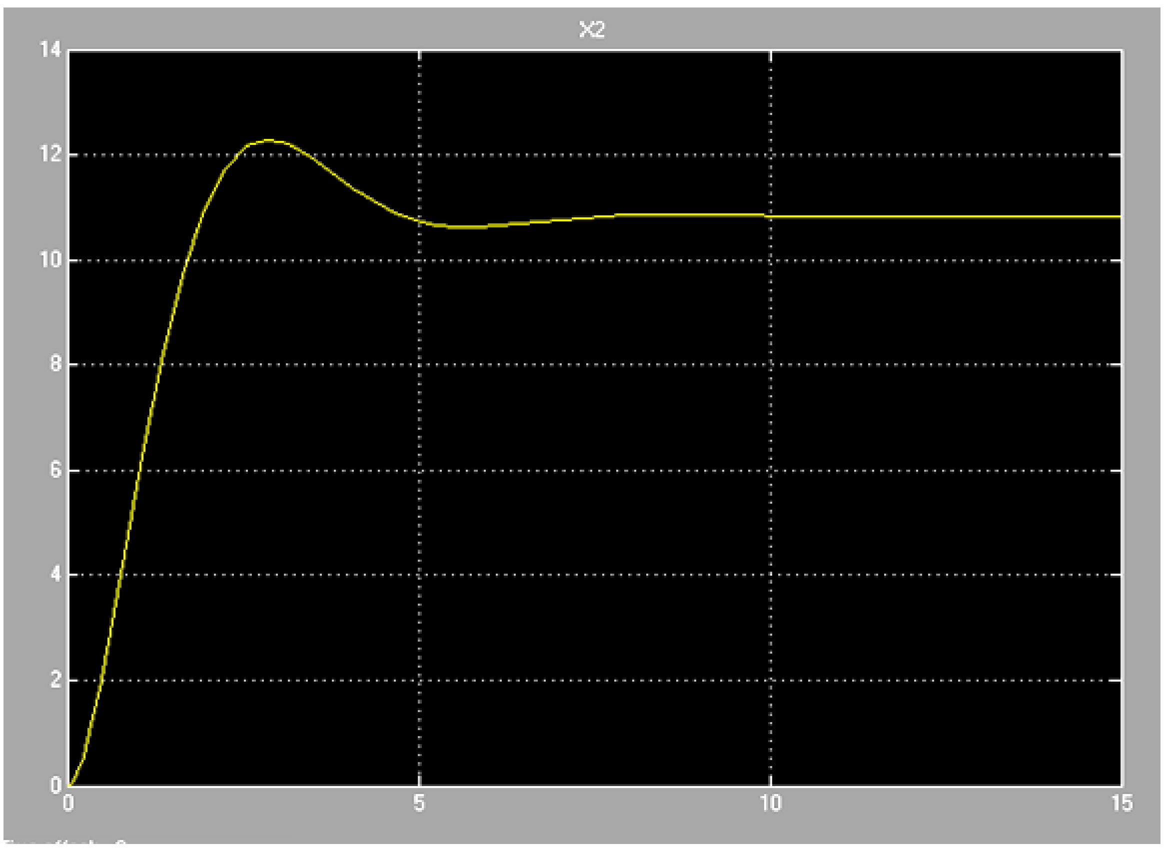


Para x1:

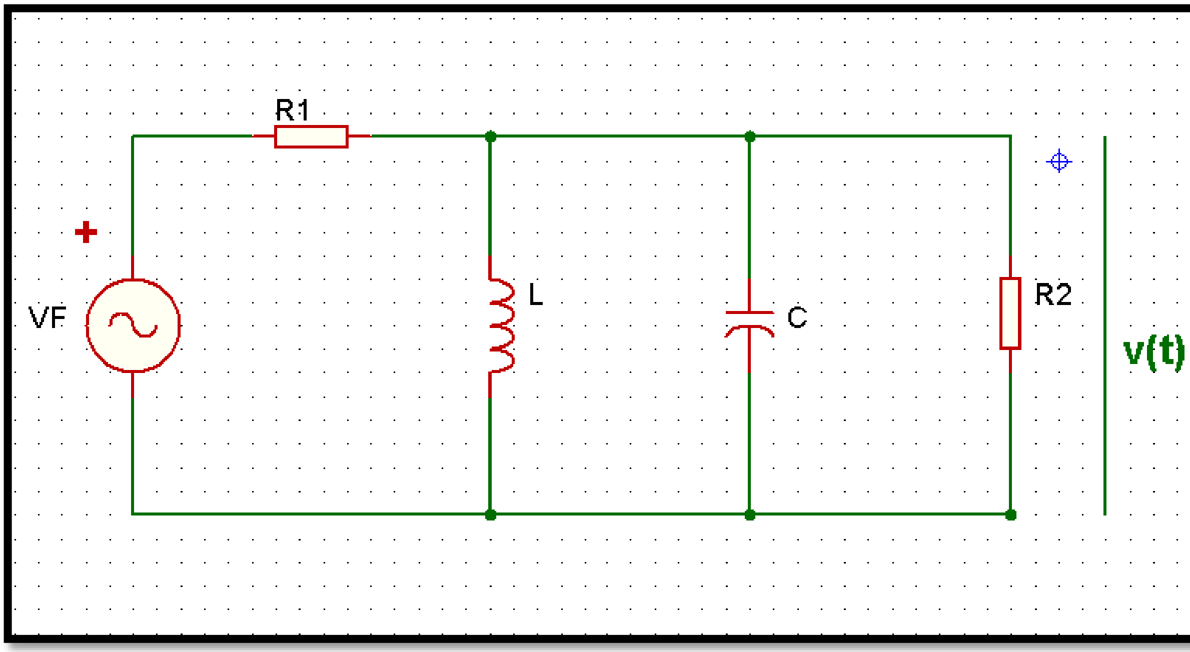



Y (s)
s2+4s+5
s4+7s3+16.5s2+19s+12
Transfer Fcn
X2 (s)

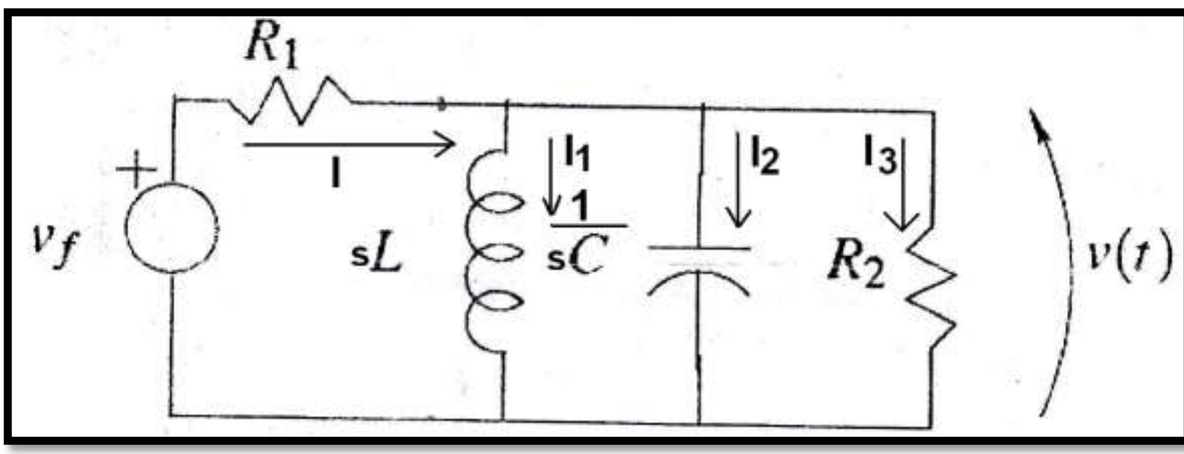
Para x1:


X2
0
2
4
6
8
10
12
14
0
5
10
15

Problema. 02.- Obtener las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento del sistema (circuito eléctrico) de la Figura, realizar su diagrama de bloques y calcular la función de transferencia tomando la salida v(t).



SOLUCIÓN



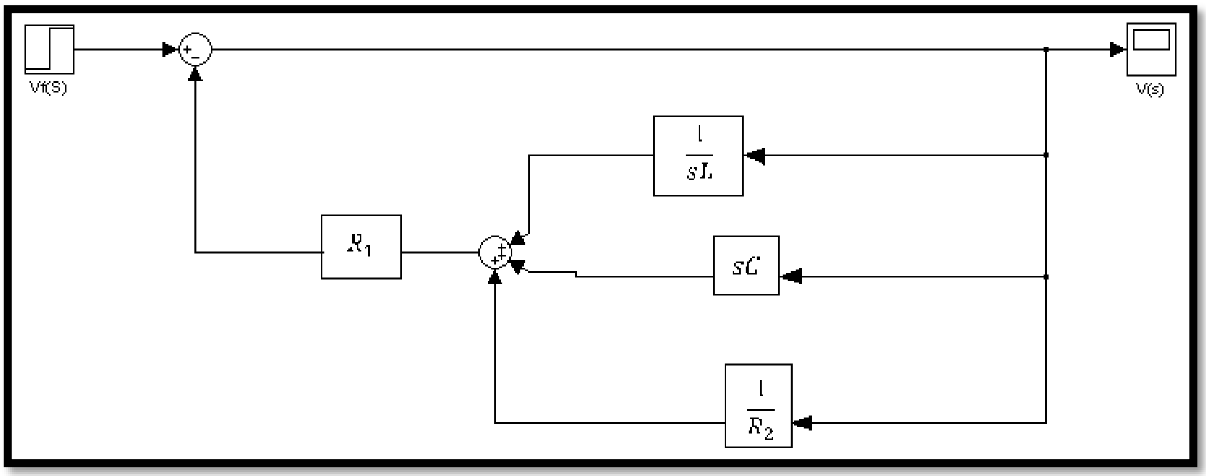
$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) + I_3(s)$$
$$V_f(s) = R_1 I(s) + V(s)$$
$$V(s) = sLI_1(s) \rightarrow I_1(s) = \frac{V(s)}{sL}$$
$$V(s) = \frac{I_2(s)}{sC} \rightarrow I_2(s) = V(s) \cdot sC$$
$$V(s) = R_2 I_3(s) \rightarrow I_3(s) = \frac{V(s)}{R_2}$$

Así tenemos:

$$V_f(s) = R_1\left(\frac{V(s)}{sL} + V(s)\cdot sC + \frac{V(s)}{R_2}\right) + V(s)$$

$$V_f(s) - R_1 V(s)\left(\frac{1}{sL} + sC + \frac{1}{R_2}\right) = V(s)$$

El Diagrama de bloques



Hallamos la Función de transferencia

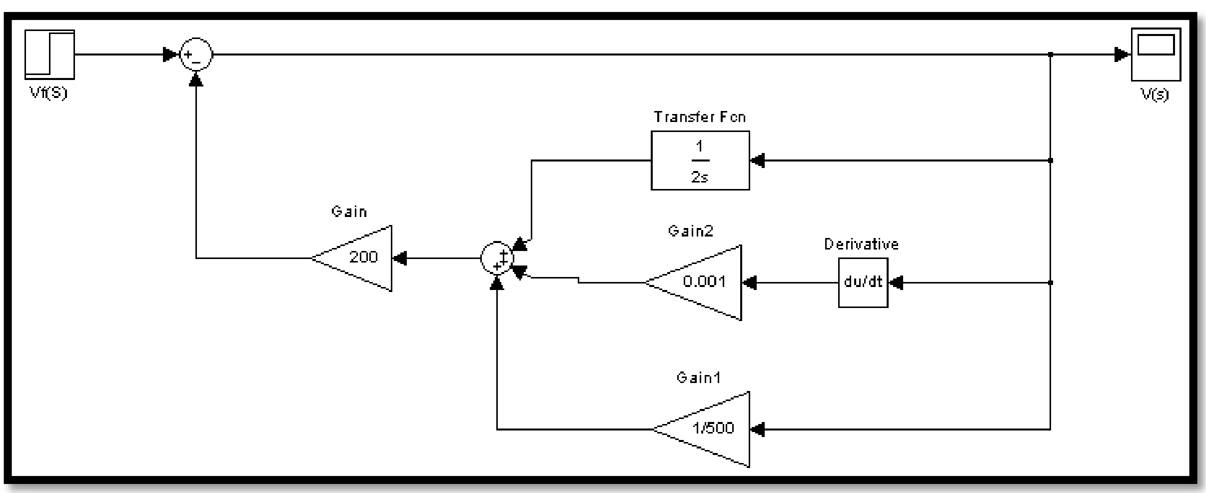
$$V_f(s) = V(s) + V(s)\left(\frac{R_1}{sL} + sCR_1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$V_f(s) = V(s)\left(\frac{R_1}{sL} + sCR_1 + 1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

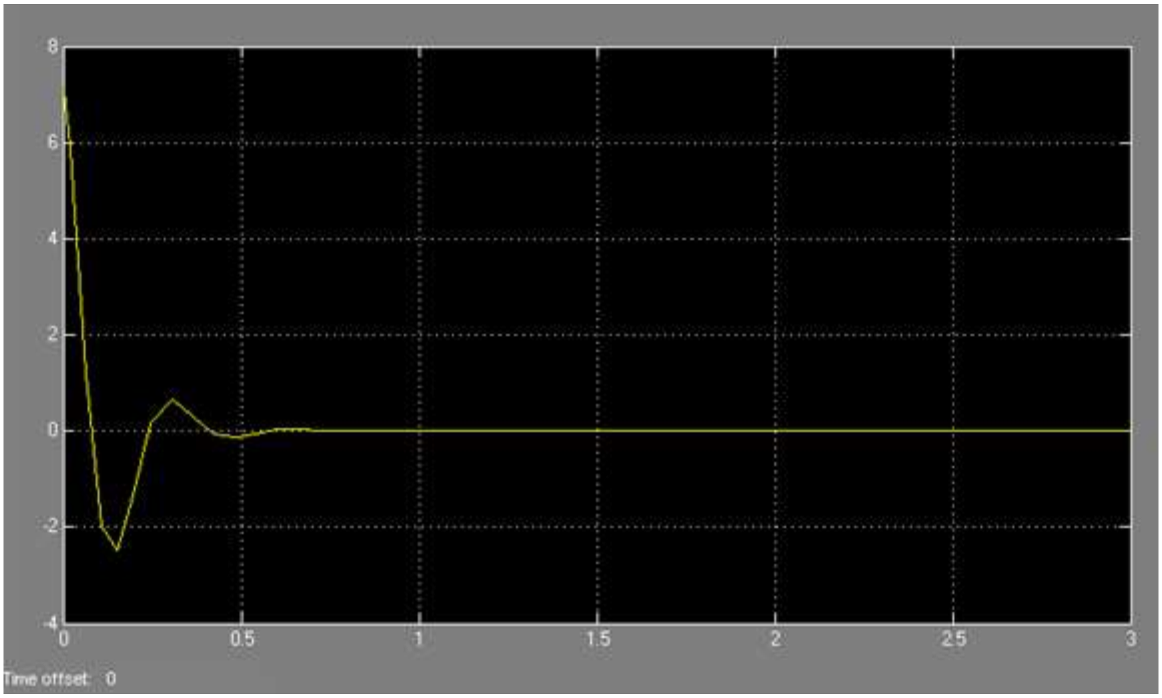
$$FT = \frac{V(s)}{V_f(s)} = \frac{1}{sCR_1 + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{R_1}{sL}} = \frac{s}{s^2CR_1 + s\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{R_1}{L}}$$

<u>SIMULACIÓN:</u>

Consideramos R1 = 500Ω, R2 = 200Ω, L = 2H y C = 0.001F

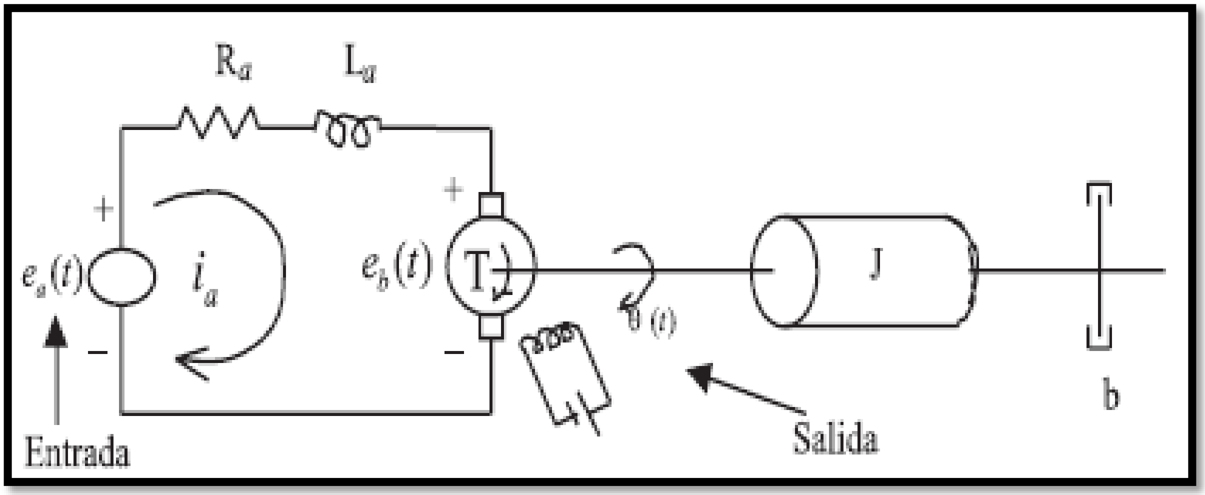


El voltaje Vf va de 0 a10

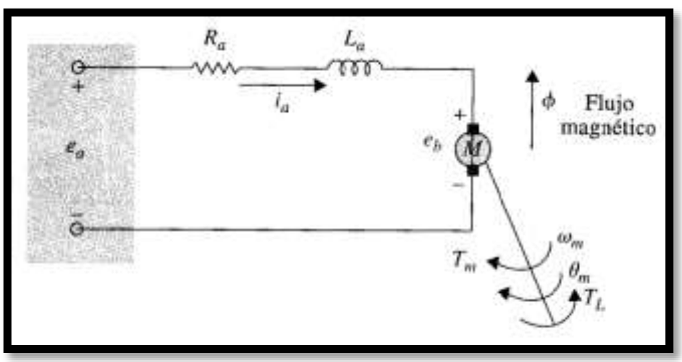


8
6
4
2
0
-2
-4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
Time offset: 0

Problema. 03.- Obtener el modelo matemático del motor DC controlado por armadura en la Figura, usando el método del espacio de estado y representarlo matricialmente.



SOLUCIÓN



$$e_b(t) = K_b.w_m(t) \qquad ...(1)$$

$$e_a(t) = R_a.i_a + L_a.\frac{di_a}{dt} + e_b \qquad ...(2)$$

Aplicando la Transformada de Laplace

$$E_b(s) = K_b.W_m(s) \qquad ...(3)$$

$$E_a(s) = R_a.I_a(s) + L_a.s.I_a(s) + E_b(s)$$

$$I_a(s) = \left(\frac{1}{R_a + s.L_a}\right).[E_a(s) - E_b(s)] \qquad ...(4)$$

La ecuación del Torque:

$$T_m(t) = K_i.i_a \qquad ...(5)$$

Su Transformada de Laplace es:

$$T_m(s) = K_i.I_a(s) \;...(6)$$

Se tiene también: $$T_m(t) - B_m.w_m(t) = J_m.\frac{dw_m}{dt}$$

Su transformada será:

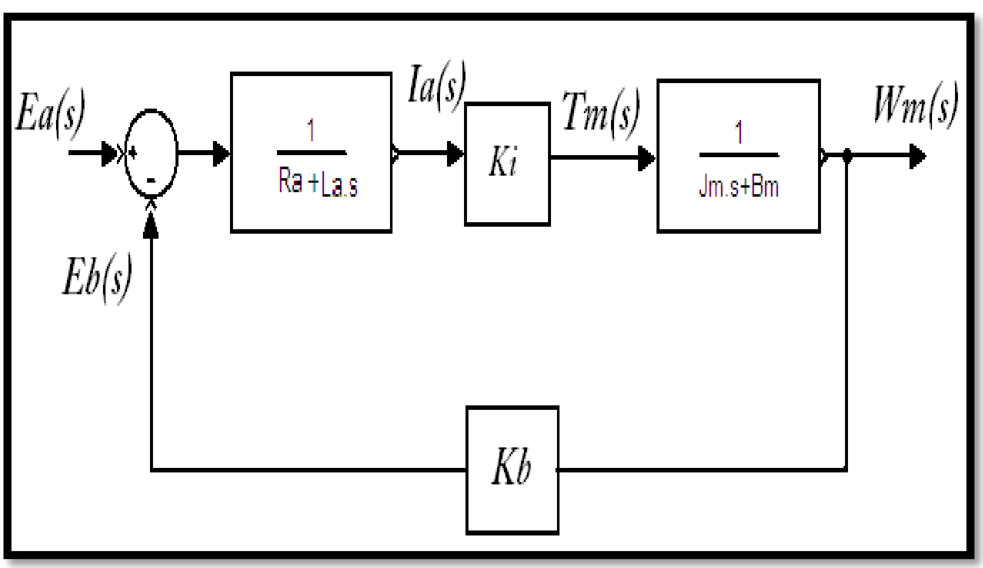
$$T_m(s) - B_m.W_m(s) = J_m.s.W_m(s)$$

$$W_m(s) = \left(\frac{1}{J_m.s + B_m}\right).T_m(s) \qquad ...(7)$$

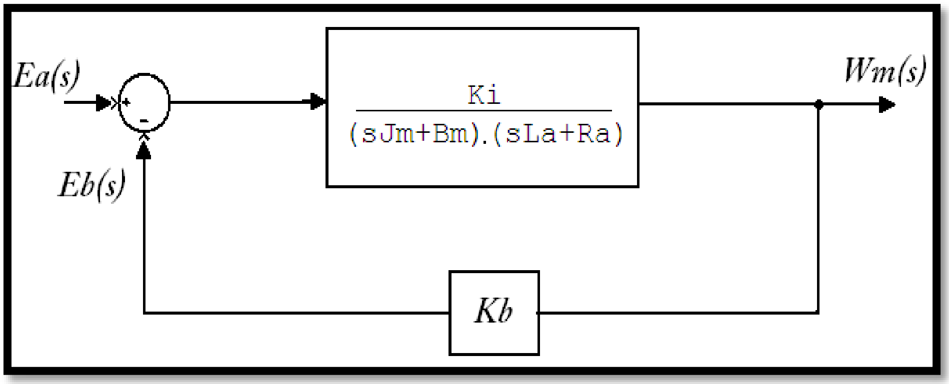
De la ecuación 4 y 6 tenemos:

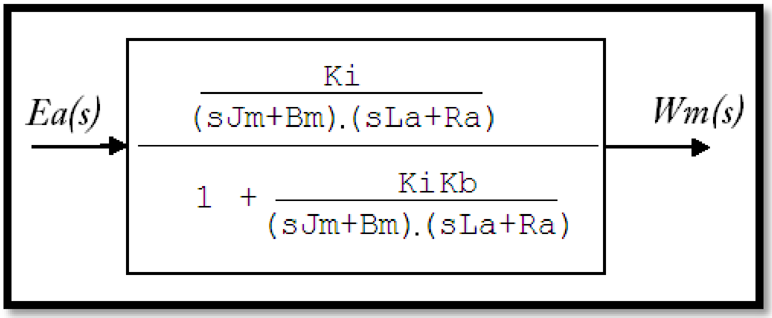
$$T_m(s) = K_i\left(\frac{1}{R_a + sL_a}\right)[E_a(s) - E_b(s)] \quad ...(8) \qquad \text{también} \qquad E_b(s) = K_b.W_m(s) \quad ...(3)$$

Con las Ecuaciones (3), (7) y (8) realzamos el diagrma de bloques



Reduciendo el diagrama de bloques:



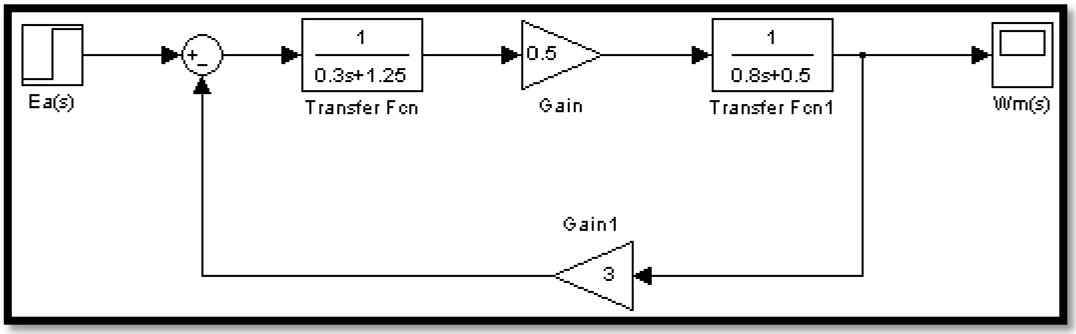


Tenemos la Función de transferencia:

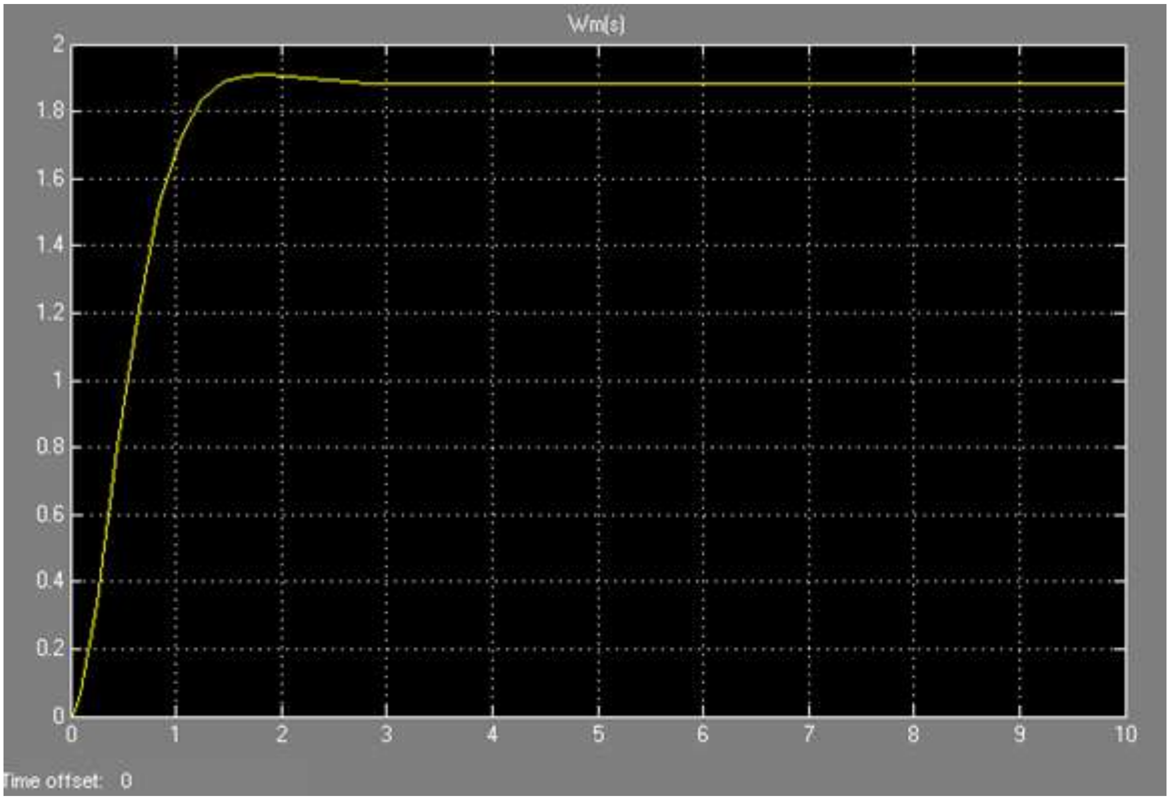
$$F.T: \frac{W_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{(s.J_m + B_m).(s.L_a + R_a) + K_i.K_b}$$

SIMULACIÓN

Consideramos $K_i = 0.5$, $J_m = 0.8$, $B_m = 0.5$, $L_a = 0.3$, $R_a = 1.25$ y $K_b = 3$



Poniendo el Step de 0 a 8 tenemos el Scope


Wm(s)
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Time offset: 0